Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор АВТИ
Лунин В.П.

_____
подпись

«____» _____ 2015 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ ПРИ ПОСТУПЛЕНИИ В АСПИРАНТУРУ

Направление – 01.06.01, Математика и механика
код, название

Направленность – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
название

Москва, 2015

I. Математический анализ

Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Равномерная непрерывность. Теорема Асколи – Арцела. Дифференцируемые функции одной переменной и их свойства. Формула Тейлора. Определенный интеграл и его свойства. Критерии интегрируемости. Интегрируемость непрерывной на отрезке функции. Первообразная и неопределенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница. Числовые последовательности и ряды. Сходимость. Критерий Коши. Достаточные признаки сходимости числового ряда. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Последовательности и ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов. Степенные ряды. Радиус сходимости. Свойства степенных рядов. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора. Ряды Фурье. Сходимость рядов Фурье в среднем. Достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье. Функции нескольких переменных. Экстремумы. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование по параметру.

Скалярное поле. Градиент. Векторное поле. Дивергенция. Ротор. Векторная форма теоремы Гаусса – Остроградского. Векторная форма теоремы Стокса. Потенциальные векторные поля. Условие потенциальности векторного поля. Соленоидальное поле. Критерий соленоидальности.

Функции комплексного переменного. Непрерывность и дифференцируемость. Условия Коши – Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Элементарные функции комплексного переменного, задаваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции и их свойства. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Вычеты. Основная теорема о вычетах и ее применение.

II. Линейная алгебра

Системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей. Определитель матрицы. Правило Крамера. Обратная матрица. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений общего вида. Теорема Кронекера – Капелли. Однородная система уравнений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

Линейные операторы в конечномерных пространствах. Матрица линейного оператора. Переход к другому базису. Матрица перехода.

Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования. Инвариантные подпространства. Корневые подпространства. Жорданова форма. Сопряженный оператор и сопряженная матрица. Теорема Шура. Нормальные, унитарные и эрмитовы операторы и матрицы в унитарном пространстве. Нормальные, ортогональные и симметричные операторы и матрицы в евклидовом пространстве. Неотрицательно определенные и положительно определенные операторы.

III. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, для системы уравнений первого порядка и уравнения порядка выше первого. Линейные дифференциальные уравнения высокого порядка и системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Общие решения однородной и неоднородной задач. Линейные однородные уравнения и системы с постоянными коэффициентами.

Основные понятия теории устойчивости. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Простейшие типы точек покоя. Второй метод Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Исследование на устойчивость по первому приближению.

IV. Теория функций и функциональный анализ

Мера Лебега. Измеримые множества и их свойства. Измеримые функции и их свойства. Предел последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду и сходимость по мере. Интеграл Лебега и его свойства. Интегрируемость ограниченных измеримых функций. Связь с интегрируемостью по Риману. Абсолютная непрерывность и счетная аддитивность интеграла Лебега.

Метрические пространства. Полнота. Теорема о вложенных шарах. Теорема Хаусдорфа о пополнении. Принцип сжимающих отображений и его применения.

Нормированные пространства. Банаховы пространства. Теорема Хана – Банаха. Теорема Банаха – Штейнгауза. Сопряженное пространство. Слабая сходимость. Второе сопряженное пространство. Рефлексивные пространства и их свойства. Евклидовы и унитарные пространства. Неравенство Коши – Буняковского. Существование ортогональных базисов, ортогонализация. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Замкнутые ортогональные системы. Гильбертовы пространства. Теорема Рисса – Фишера. Изоморфизм

гильбертовых пространств. Теоорема Рисса – Фреше о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

Линейные операторы в нормированных пространствах. Непрерывные и ограниченные линейные операторы. Норма ограниченного линейного оператора. Обратный оператор. Линейные операторы в гильбертовых пространствах. Сопряженный оператор и его свойства. Самосопряженные операторы. Вполне непрерывные операторы. Спектр линейного оператора. Резольвента. Резольвентное множество. Собственные значения. Свойства спектра вполне непрерывного самосопряженного оператора.

V. Уравнения математической физики

Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Метод характеристик. Формула Даламбера. Задача Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Принцип максимума. Единственность решения задачи Дирихле, непрерывная зависимость решения от данных задачи. Обобщенные решения. Решение задачи Дирихле методом Галеркина. Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности. Принцип максимума. Решение начально-краевых задач методом Фурье. Начально-краевые задачи для уравнения колебаний струны. Решение начально-краевых задач методом Фурье.

Основные понятия теории разностных схем. Сетки. Сеточные функции. Разностные схемы и простейшие методы их построения. Аппроксимация, устойчивость и сходимость. Простейшие разностные схемы для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности и их свойства.

Основная литература

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1,2. М.: Высшая школа. 1988.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Лань. , 2002, 482 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит. 2002 г.– 302 с.
4. Ильин В.А., Ким Г.Д., Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 320 с.
5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Едиториал УРСС. 2002. – 320 с.
6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Либроком. 2009.

7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ. 2004. – 798с.

8. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. – 400с.

9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа М.: Физматлит. 2004. – 572 с.

10. Треногин В.А. Функциональный анализ. М. Физматлит. 2002.

11. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы. М.: Изд. Дом МЭИ. 2008.

Дополнительная литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск, 2000.

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1998.

3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

4. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2004.

5. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, М.: Физматлит, 2009.

6. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005.

7. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.