

БАНК ЗАДАЧ
для вступительных испытаний в магистратуру
(базовая часть)

Задания билета	1,2,3	4	5
Разделы	1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 14	2, 3, 8, 9, 12, 13, 15, 19	16, 17, 18, 20
Количество баллов	5 б.	10 б.	15 б.

Содержание

Раздел 1. Производная, частная производная, дифференциал.

Раздел 2. Исследование функции.

Раздел 3. Матрица и определители.

Раздел 4. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений.

Раздел 5. Прямая и плоскость в пространстве.

Раздел 6. Кривые второго порядка.

Раздел 7. Неопределенный интеграл.

Раздел 8. Интегрирование рациональных и тригонометрических функций.

Раздел 9. Определенный интеграл. Замена переменных.

Раздел 10. Вычисление площадей плоских фигур.

Раздел 11. Числовые ряды.

Раздел 12. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Раздел 13. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Раздел 14. Комплексные числа.

Раздел 15. Элементарные функции комплексного переменного, их свойства.

Раздел 16. Изолированные особые точки и их классификация.

Раздел 17. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Раздел 18. Функция-оригинал и ее изображение по Лапласу.

Раздел 19. Восстановление оригинала по изображению.

Раздел 20. Операционные методы решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Справочные материалы

Раздел 1. Производная, частная производная, дифференциал.

Найти производную функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = 3^{\frac{1}{\log_5(x+1)}}$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{2 - (\operatorname{tg} x)^5}$;

5) $f(x) = x^{\ln^2 x}$;

7) $f(x) = \frac{3 \operatorname{tg} \sqrt[4]{x} + 2}{4 \operatorname{tg} \sqrt[4]{x} - 1}$;

9) $f(x) = \frac{1}{\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)^2}$;

11) $f(x) = \sin^3(\sqrt{x} + 2)$;

13) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{th}^3(\sqrt{x})}$;

15) $f(x) = \frac{\sqrt[5]{2x+1}}{\sqrt[3]{x(x+2)^2}}$;

17) $f(x) = \frac{1}{\log_5(\arcsin \sqrt{x})}$;

19) $f(x) = \operatorname{ch}^2(\operatorname{sh} \sqrt{x})$;

21) Найти $(\operatorname{arctg} x)''$.

23) Найти $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, если $f = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

25) Найти $d^2 f$, если $f = \frac{\cos(xy)}{x}$.

2) $f(x) = \frac{1}{\arcsin \sqrt{x}}$;

4) $f(x) = \sin^2(x^3 + 5x)$;

6) $f(x) = \log_3(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})$;

8) $f(x) = 5^{\frac{x}{3^x}}$;

10) $f(x) = \ln(e^{\sqrt{x}} + \sqrt{e^{2\sqrt{x}} + 1})$;

12) $f(x) = \sqrt[3]{2 - \arcsin x^2}$;

14) $f(x) = (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{th} x}$;

16) $f(x) = (x+1)^3 e^{\frac{x}{x+1}}$;

18) $f(x) = \frac{xe^{\sqrt{x}} + 1}{2xe^{\sqrt{x}} + 3}$;

20) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^3(xe^x + 1)}$.

22) Найти $(x \sin x)^{(3)}$.

24) Найти df , если $f = x^y$.

Раздел 2. Исследование функции.

Провести полное исследование функции и построить эскиз ее графика:

1) $y = \frac{x^3 - 1}{x}$;

2) $y = x^2(x+1)^2$;

3) $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1};$

4) $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2;$

5) $y = x^2 e^x;$

6) $y = \frac{e^x}{x};$

7) $y = (x^2 - x)e^x;$

8) $y = \ln \cos x;$

9) $y = \frac{x^2 - 1}{x};$

10) $y = \frac{e^x}{x^2};$

11) $y = \frac{x}{e^x};$

12) $y = \frac{x^2}{e^x};$

Раздел 3. Матрица и определители.

1) Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти определитель $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

2) Найти обратную к матрице $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

3) Решить матричное уравнение (с неизвестной матрицей \mathbf{X}):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Найти определитель матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5) Приведя матрицу к ступенчатому виду, найти ее определитель:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

6) Определить ранг матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

7) Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $\mathbf{A}^3 - 3\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A}$.

8) Приведя матрицу \mathbf{A} к ступенчатому виду, определить ее ранг:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

9) Найти определитель $\det(\mathbf{A}^{-1})$ обратной матрице \mathbf{A} , если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

10) Найти $\det(\mathbf{AB})$, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11) Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Имеет ли матрица \mathbf{AB} обратную?

12) Найти собственные числа матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Раздел 4. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений.

Исследовать систему линейных алгебраических уравнений (доказать совместность, записать фундаментальную систему решений, найти и проверить общее решение:

1) $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 16, \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = -2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 8, \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 9; \end{cases}$

4) $\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 + 9x_3 - 11x_4 = -18, \\ -3x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 11x_4 = -16; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 9; \end{cases}$

6) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -7, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6, \\ -2x_1 + 7x_2 + 9x_3 - 11x_4 = -18; \end{cases}$

$$9) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

Раздел 5. Прямая и плоскость в пространстве.

1) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;1;0)$ и параллельной плоскости $3x - 4y + z = 1$.

2) Написать уравнение плоскости, содержащей точку $A(1;1;1)$ и ось Ox .

3) Найти угол между плоскостями π_1 и π_2 , где $\pi_1: 2x - y + z = 0$,
 $\pi_2: x + y - z = 1$.

4) Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;2;3)$ и $B(0;-1;3)$.

5) Найти угол между прямой l и плоскостью π , где $l: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -z, \\ z = 2 + t, \end{cases}$

$$\pi: x + y + z = 3.$$

6) Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;0;2)$ и перпендикулярной плоскости $\pi: x - y + z = 1$.

7) Написать каноническое уравнение прямой l , которая является линией пересечения плоскостей π_1 и π_2 , где $\pi_1: 2x - y + z = 0$, $\pi_2: x + y - z = 1$

8) Найти угол между прямыми l_1 и l_2 , где $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z$, $l_2: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -t, \\ z = 3t. \end{cases}$

9) Лежат ли прямые l_1 и l_2 в одной плоскости, если $l_1: x = y = z$, $l_2: \begin{cases} x = 1, \\ y = t, \\ z = 2t? \end{cases}$

10) Лежат ли точки $A_1(1;0;2)$, $A_2(2;-1;0)$, $A_3(0;0;0)$, $A_4(1;-1;1)$ в одной плоскости?

Раздел 6. Кривые второго порядка.

Определить вид кривой и сделать ее эскиз:

1) $(x+5)^2 + y^2 = 3$;

2) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$;

3) $(x-5)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$;

4) $y^2 = 2x + 2$;

5) $x^2 - y^2 + 2x + 2y = 0$;

б) Написать (в декартовой системе координат) уравнение окружности с центром в точке $A(2; -4)$, проходящей через точку $B(-1; 0)$.

Раздел 7. Неопределенный интеграл.

1) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$;

2) $\int \frac{8^x \cdot 10^{2x}}{e^{3x}} dx$;

3) $\int x^2 \sin x^3 dx$;

4) $\int x^2 e^{2x^3} dx$;

5) $\int \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^3 \cdot \frac{dx}{(x+2)^2}$;

6) $\int \frac{x^3 dx}{x^2 - 4}$;

7) $\int \ln x dx$;

8) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) e^{x + \frac{1}{x}} dx$;

9) $\int \operatorname{arctg} x dx$;

10) $\int \frac{x dx}{x^2 + 4}$.

Раздел 8. Интегрирование рациональных и тригонометрических функций.

1) $\int \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}$;

2) $\int \frac{dx}{x^3 + x}$;

3) $\int \frac{(x+3)dx}{x(x+1)(x+2)}$;

4) $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}$;

5) $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 2x - 3)(x+1)}$;

6) $\int \sin^2 x \cos x dx$;

7) $\int \sin^2 x dx$;

8) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$;

9) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$;

10) $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x}$;

11) $\int \frac{(\cos x - 3 \sin x) dx}{\sin x + 3 \cos x}$.

Раздел 9. Определенный интеграл. Замена переменных.

1) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x}$;

2) $\int_0^1 (2x+1)e^{x+2} dx$;

3) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 2};$

5) $\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x + 3 \ln x}{x} dx;$

7) $\int_0^1 \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} dx;$

9) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 3}};$

4) $\int_2^e \frac{dx}{x \ln^3 x}$

6) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x dx;$

8) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx;$

10) $\int_0^1 e^{(x+e^x)} dx.$

Раздел 10. Вычисление площадей плоских фигур.

1) Область ограничена кривыми: $y = x$, $y = 2x$, $y = 3$. Найти ее площадь.

2) Область ограничена кривыми: $y = 4 - x^2$, $y = x^2$. Найти ее площадь.

3) Область ограничена кривыми: $y = x^2$, $x + y = 4$, $y = 0$. Найти ее площадь.

4) Область ограничена кривыми: $y^2 = x$, $x^2 = y$. Найти ее площадь.

5) Найти площадь фигуры, если ее границей является кривая $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

6) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = 2 \sin t \\ y = 3 \cos t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

7) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 1 - \cos t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

8) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах как $\rho = \cos \varphi$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах как $\begin{cases} \rho = \varphi \\ \varphi \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

10) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$.

11) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$.

Раздел 11. Числовые ряды.

1) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4}$?

2) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{n^2+n+7}$?

3) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{(n+1)!}$?

4) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\frac{n^2}{3^{n+1}}}$?

5) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+3)!}$?

6) Сходится ли ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$?

7) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$?

8) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+5}$?

9) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+2)!}$?

10) Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} \cdot 5^n}{(21)^n}$.

Раздел 12. Дифференциальные уравнения первого порядка.

1) Решить уравнение $y' = xy + x$.

2) Решить уравнение $(x+1)^2 y' = y$.

3) Решить задачу Коши: $y' = 1 + 2\frac{y}{x}$, $y(1) = 1$.

4) Найти общий интеграл уравнения $(x+y)y' = x - y + \frac{xy + y^2}{x}$.

5) Решить задачу Коши: $y' = 2y + 2$, $y(0) = 0$.

6) Решить задачу Коши: $2yy' = y^2 + 1$, $y(\ln 2) = 1$.

7) Найти общее решение уравнения $xy' + y = xy + 1$.

8) Решить задачу Коши: $y' = y - x + 1$, $y(0) = 1$.

9) Найти общее решение уравнения $y' \operatorname{tg} x = y$.

7) Найти общее решение уравнения $\frac{y'}{y} = \ln y - x + 1$.

Раздел 13. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

2) Найти общее решение уравнения $y''' + 2y'' + y = 0$.

3) Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' + 17y' = 0$.

- 4) Решить задачу Коши: $y'' - 5y' + 6y = 3e^x$, $y(0) = 0$.
- 5) Решить задачу Коши: $y'' - 4y = x$, $y(0) = 1$.
- 6) Найти общее решение уравнения $y''' - 9y' = x$.
- 7) Найти общее решение уравнения $y''' + y' = 1$.
- 8) Найти общее решение уравнения $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.
- 9) Найти общее решение уравнения $y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.
- 10) Решить задачу Коши: $y''' = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

Раздел 14. Комплексные числа.

- 1) Записать в алгебраической форме число $I = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \right)^2$.
- 2) Записать в алгебраической форме число $I = (1 - \sqrt{3}i)^{2018}$.
- 3) Для числа $z = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$ найти $|z|^{2018}$ и $\operatorname{Arg}(z^{2018})$.
- 4) Записать в алгебраической форме число $I = \frac{\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18}}$.
- 5) Нарисовать на комплексной плоскости область, заданную неравенствами:

$$\begin{cases} |z - 1| \leq 1, \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
- 6) Нарисовать на комплексной плоскости область, заданную неравенством $|z| \geq |z + 1|$.
- 7) Решить уравнение $\frac{2 + 3i}{(2 - i)}z - i = 0$. Ответ записать в алгебраической форме.
- 8) Решить уравнение $(2 + i)z - (1 + i)\bar{z} = i$. Ответ записать в алгебраической форме.
- 9) Найти все решения уравнения $z^3 - 2z^2 + 5z = 0$, лежащие в области $\begin{cases} |z| \leq 2, \\ \operatorname{Re} z \geq 1. \end{cases}$
- 10) Найти все решения уравнения $z^2 + 2z + 10 = 0$, лежащие в области $\operatorname{Im}(\bar{z}) \geq \operatorname{Re} z$.

Раздел 15. Элементарные функции комплексного переменного, их свойства.

- 1) Решить уравнение $z^3 = -i$. Ответы записать в алгебраической форме.
- 2) Найти все значения $\sqrt[4]{i^4}$. Ответы записать в алгебраической форме.
- 3) Решить уравнение $\cos z = 2$. Ответы записать в алгебраической форме.
- 4) Записать в алгебраической форме i^i .
- 5) Найти $\operatorname{Re}(e^{iz^2})$.
- 6) Может ли функция $u = x^2 + y^2 - xy$ быть действительной частью некоторой аналитической в \square функции?
- 7) Найти аналитическую в \square функцию $f(z)$, такую, что $\operatorname{Im} f = x^2 - y^2 + y$, $f(0) = 0$.
- 8) Записать в алгебраической форме $\sin(1+i)$.
- 9) Решить уравнение $e^z = e^{2018\pi i}$.

Раздел 16. Изолированные особые точки и их классификация.

Определить особые точки и их типы для функции:

- 1) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$;
- 2) $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$;
- 3) $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{1 - \cos z}$;
- 4) $f(z) = \frac{e^{1/z} + 1}{e^{1/z} - 1}$;
- 5) $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$;
- 6) $f(z) = \frac{z(\operatorname{sh} z - z)}{(1 - \cos z)^2}$;
- 7) $f(z) = e^z e^{\frac{1}{z-2}}$;
- 8) $f(z) = \frac{1}{\left(\sin z - \frac{1}{2}\right)^2}$;
- 9) $f(z) = \frac{1}{\sin(z-1)} e^{\frac{1}{z}}$;
- 10) $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^3}$.

Раздел 17. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Вычислить:

- 1) $\int_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz$;
- 2) $\int_{|z-1|=3} \frac{dz}{\sin z}$;
- 3) $\int_{|z-2|=5} \frac{\sin z - z}{z^4} dz$;
- 4) $\int_{|z|=1} z^3 e^{1/z} dz$;

$$5) \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z \cos z} dz;$$

$$7) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 9} dx;$$

$$9) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)};$$

$$6) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2};$$

$$8) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + 2};$$

$$10) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1} dx.$$

Раздел 18. Функция-оригинал и ее изображение по Лапласу.

1) Найти изображение функции $f(t) = t^2 e^{-3t}$.

2) Найти изображение функции $f(t) = t e^{-3t} \sin 2t$.

3) Найти изображение функции $f(t) = t \operatorname{ch} 2t - \operatorname{sh} t$.

4) Найти изображение функции $f(t) = \int_0^t e^{-x} \cos(t-x) dx$.

5) Пусть $f(t) = e^{-2t} \sin 3t$. Найти изображение функции $f''(t)$.

6) Найти изображение функции $f(t) = \int_0^t x^3 e^{-3x} dx$.

7) Пусть $f(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0; 1], \\ 0, & t \notin [0; 1]. \end{cases}$ Найти изображение $f(t)$.

8) Пусть $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \in [0; 1], \\ 1, & t \in [1; 2], \\ 0, & t > 2. \end{cases}$ Найти изображение $f(t)$.

9) Пусть $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$ Найти изображение функции $f(t) = (t-1)e^{(t-1)}\eta(t-1)$.

10) Пусть $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$ Найти изображение $f(t) = \sin 2(t-2)e^{-2}\eta(t-2)$.

11) Найти изображение функции $f(t) = t \sin^2 2t$.

Раздел 19. Восстановление оригинала по изображению.

Найти (непрерывную на $[0; +\infty)$) функцию-оригинал, если ее изображение $F(p)$ равно:

$$1) F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 1)(p^2 + 2)};$$

$$2) F(p) = \frac{p-3}{p^2 - 6p + 10};$$

$$3) F(p) = \left(\frac{p-2}{p^2-4p+5} \right)'';$$

$$4) F(p) = \left(\frac{p}{p^2+9} \right)'';$$

$$5) F(p) = \int_p^{+\infty} \frac{dq}{q^2+4};$$

$$6) F(p) = \frac{e^{-2p}}{p+1};$$

$$7) F(p) = (e^{-2p} + 3e^{-p}) \frac{1}{p};$$

$$8) F(p) = \int_p^{+\infty} \frac{dq}{q(q^2+1)};$$

$$9) F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k+1}};$$

$$10) F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)^{k+1}};$$

Раздел 20. Операционные методы решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

1) Решить операционным методом задачу Коши:

$$x'' + x = 2t + 3, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

2) Решить операционным методом задачу Коши:

$$x'' + x' = t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

3) Решить операционным методом задачу Коши:

$$x'' + x = 2e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

4) Решить операционным методом задачу Коши:

$$x'' + x = 2\cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

5) Операционным методом найти решение системы уравнений $\begin{cases} x' - y = 0 \\ y' - x = -1, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 2, y(0) = 1$.

6) Операционным методом найти решение системы уравнений $\begin{cases} x' - 2y = 2t \\ y' = \frac{1}{2}x - 1, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 2, y(0) = 1$.

7) Операционным методом найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x' - 2y = 0 \\ y' + x = 3e^{2t} + 1, \end{cases} \text{ удовлетворяющее начальным условиям } x(0) = 2, y(0) = 1.$$

Справочные материалы

А. Таблица производных

1. $c' = 0, c = \text{const}$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

4. $(e^x)' = e^x$

5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10. $(\text{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

11. $(\text{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\text{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

15. $(\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

16. $(\text{sh } x)' = \text{ch } x$

17. $(\text{ch } x)' = \text{sh } x$

18. $(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$

19. $(\text{th } x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$

Б. Таблица интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$

3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
 $n \neq -1, x > 0$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg} x + C$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + C$

13. «Высокий» логарифм:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, |x| \neq a$$

14. «Длинный» логарифм:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

В. Таблица изображений и оригиналов

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$t^\alpha (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$t e^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p - \lambda)^2}$	$\frac{\sin t}{t}$	$\text{arctg } p$
$t^n e^{\lambda t}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$	$\frac{1}{t}(1 - e^{-t})$	$\ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$
$t^\alpha e^{\lambda t}, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p - \lambda)^{\alpha+1}}$	$\delta(t)$	1
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\delta(t - a), a > 0$	e^{-ap}
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$		