БАНК ЗАДАЧ
для вступительных испытаний в магистратуру
(базовая часть)

Задания билета	1,2,3	4	5
Разделы	1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 14	2, 3, 8, 9, 12, 13, 15, 19	16, 17, 18, 20
Количество баллов	5 б.	10 б.	15 б.

Содержание

Раздел 1. Производная, частная производная, дифференциал.

Найти производную функции *f(x)*, если:

1) $f(x)=3^{\frac{1}{\log_5(x+1)}}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\arcsin\sqrt{x}}$;

3) $f(x)=\sqrt[3]{2-(\operatorname{tg}x)^5}$;

4) $f(x)=\sin^2(x^3+5x)$;

5) $f(x)=x^{\frac{1}{\ln^2 x}}$;

6) $f(x)=\log_3(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$;

7) $f(x)=\dfrac{3\operatorname{tg}\sqrt[4]{x}+2}{4\operatorname{tg}\sqrt[4]{x}-1}$;

8) $f(x)=5^{\frac{x}{3^x}}$;

9) $f(x)=\dfrac{1}{\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)^2}$;

10) $f(x)=\ln\left(e^{\sqrt{x}}+\sqrt{e^{2\sqrt{x}}+1}\right)$;

11) $f(x)=\sin^3(\sqrt{x}+2)$;

12) $f(x)=\sqrt[3]{2-\arcsin x^2}$;

13) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{th}^3(\sqrt{x})}$;

14) $f(x)=(\operatorname{sh}x)^{\operatorname{th}x}$;

15) $f(x)=\dfrac{\sqrt[5]{2x+1}}{\sqrt[3]{x}(x+2)^2}$;

16) $f(x)=(x+1)^3e^{\frac{x}{x+1}}$;

17) $f(x)=\dfrac{1}{\log_5(\arcsin\sqrt{x})}$;

18) $f(x)=\dfrac{xe^{\sqrt{x}}+1}{2xe^{\sqrt{x}}+3}$;

19) $f(x)=\operatorname{ch}^2(\operatorname{sh}\sqrt{x})$;

20) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sh}^3(xe^x+1)}$.

21) Найти $(\operatorname{arctg}x)''$.

22) Найти $(x\sin x)^{(3)}$.

23) Найти $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, если $f=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

24) Найти df, если $f=x^y$.

25) Найти $d^2 f$, если $f=\dfrac{\cos(xy)}{x}$.

Раздел 2. Исследование функции.

Провести полное исследование функции и построить эскиз ее графика:

1) $y=\dfrac{x^3-1}{x}$;

2) $y=x^2(x+1)^2$;

3) $y = \frac{x^2+1}{x+1}$;

4) $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$;

5) $y = x^2 e^x$;

6) $y = \frac{e^x}{x}$;

7) $y = (x^2 - x)e^x$;

8) $y = \ln\cos x$;

9) $y = \frac{x^2-1}{x}$;

10) $y = \frac{e^x}{x^2}$;

11) $y = \frac{x}{e^x}$;

12) $y = \frac{x^2}{e^x}$;

Раздел 3. Матрица и определители.

1) Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти определитель $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

2) Найти обратную к матрице $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

3) Решить матричное уравнение (с неизвестной матрицей $\mathbf{X}$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Найти определитель матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5) Приведя матрицу к ступенчатому виду, найти ее определитель:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

6) Определить ранг матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

7) Пусть $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Найти $\mathbf{A}^3-3\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}$.

8) Приведя матрицу **A** к ступенчатому виду, определить ее ранг:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&0&7\\0&1&2&0&4\\1&1&5&4&12\\1&1&5&4&15\end{pmatrix}.$$

9) Найти определитель $\det(\mathbf{A}^{-1})$ обратной матрице **A**, если

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&0&4\\4&1&6\end{pmatrix}.$$

10) Найти $\det(\mathbf{AB})$, если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&2\end{pmatrix}$.

11) Пусть $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&2\end{pmatrix}$. Имеет ли матрица $\mathbf{AB}$ обратную?

12) Найти собственные числа матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\1&4&0\end{pmatrix}$.

Раздел 4. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений.

Исследовать систему линейных алгебраических уравнений (доказать совместность, записать фундаментальную систему решений, найти и проверить общее решение:

1) $\begin{cases}-2x_1+4x_2+2x_4=16,\\ x_1+2x_3+3x_4=-2;\end{cases}$

2) $\begin{cases}-x_1+2x_2+5x_3+3x_4=8,\\ 3x_1-6x_2+7x_3+13x_4=-2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1+2x_3+3x_4=-2,\\ -3x_1+x_2-5x_3-7x_4=9;\end{cases}$

4) $\begin{cases}-2x_1+7x_2+9x_3-11x_4=-18,\\ -3x_1+5x_2+8x_3-11x_4=-16;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x_1+2x_3+3x_4=-2,\\ -3x_1+x_2-5x_3-7x_4=9;\end{cases}$

6) $\begin{cases}-2x_1+3x_2+5x_3-5x_4=-7,\\ -x_1+x_2+2x_3-2x_4=-2;\end{cases}$

7) $\begin{cases}x_2+x_3-x_4=-3,\\ x_1-2x_2-3x_3+3x_4=5;\end{cases}$

8) $\begin{cases}x_1+4x_2+3x_3-2x_4=-6,\\ -2x_1+7x_2+9x_3-11x_4=-18;\end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=3, \\ 2x_1-x_2+x_4=2, \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=5; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_5=2, \\ x_1+x_3+x_4=3, \\ 3x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=5. \end{cases}$

Раздел 5. Прямая и плоскость в пространстве.

1) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;1;0)$ и параллельной плоскости $3x-4y+z=1$.
2) Написать уравнение плоскости, содержащей точку $A(1;1;1)$ и ось Ox.
3) Найти угол между плоскостями π_1 и π_2, где $\pi_1: 2x-y+z=0$, $\pi_2: x+y-z=1$.
4) Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;2;3)$ и $B(0;-1;3)$.
5) Найти угол между прямой l и плоскостью π, где $l: \begin{cases} x=1+2t, \\ y=-t, \\ z=2+t, \end{cases}$ $\pi: x+y+z=3$.
6) Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;0;2)$ и перпендикулярной плоскости $\pi: x-y+z=1$.
7) Написать каноническое уравнение прямой l, которая является линией пересечения плоскостей π_1 и π_2, где $\pi_1: 2x-y+z=0$, $\pi_2: x+y-z=1$
8) Найти угол между прямыми l_1 и l_2, где $l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=z$, $l_2: \begin{cases} x=2+t, \\ y=-t, \\ z=3t. \end{cases}$
9) Лежат ли прямые l_1 и l_2 в одной плоскости, если $l_1: x=y=z$, $l_2: \begin{cases} x=1, \\ y=t, \\ z=2t? \end{cases}$
10) Лежат ли точки $A_1(1;0;2)$, $A_2(2;-1;0)$, $A_3(0;0;0)$, $A_4(1;-1;1)$ в одной плоскости?

Раздел 6. Кривые второго порядка.

Определить вид кривой и сделать ее эскиз:

1) $(x+5)^2+y^2=3$;

2) $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$;

3) $(x-5)^2+\dfrac{y^2}{4}=1$;

4) $y^2=2x+2$;

5) $x^2-y^2+2x+2y=0$;

6) Написать (в декартовой системе координат) уравнение окружности с центром в точке $A(2;-4)$, проходящей через точку $B(-1;0)$.

Раздел 7. Неопределенный интеграл.

1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

2) $\int \frac{8^x \cdot 10^{2x}}{e^{3x}} dx$;

3) $\int x^2 \sin x^3 dx$;

4) $\int x^2 e^{2x^3} dx$;

5) $\int \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^3 \cdot \frac{dx}{(x+2)^2}$;

6) $\int \frac{x^3 dx}{x^2-4}$;

7) $\int \ln x\, dx$;

8) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$;

9) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$;

10) $\int \frac{x\, dx}{x^2+4}$.

Раздел 8. Интегрирование рациональных и тригонометрических функций.

1) $\int \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}$;

2) $\int \frac{dx}{x^3+x}$;

3) $\int \frac{(x+3)dx}{x(x+1)(x+2)}$;

4) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$;

5) $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+2x-3)(x+1)}$;

6) $\int \sin^2 x \cos x\, dx$;

7) $\int \sin^2 x\, dx$;

8) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$;

9) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$;

10) $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x}$;

11) $\int \frac{(\cos x - 3\sin x)dx}{\sin x + 3\cos x}$.

Раздел 9. Определенный интеграл. Замена переменных.

1) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos x}$;

2) $\int_0^1 (2x+1)e^{x+2} dx$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+2}$;

4) $\int_2^{\mathrm{e}} \frac{dx}{x ln^3 x}$

5) $\int\limits_1^{e^2} \frac{\ln^3 x + 3\ln x}{x} dx$;

6) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 x\, dx$;

7) $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} dx$;

8) $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^2 x\, dx$;

9) $\int\limits_1^2 \frac{x\, dx}{\sqrt{x^4+3}}$;

10) $\int\limits_0^1 e^{(x+e^x)} dx$.

Раздел 10. Вычисление площадей плоских фигур.

1) Область ограничена кривыми: $y = x$, $y = 2x$, $y = 3$. Найти ее площадь.

2) Область ограничена кривыми: $y = 4 - x^2$, $y = x^2$. Найти ее площадь.

3) Область ограничена кривыми: $y = x^2$, $x + y = 4$, $y = 0$. Найти ее площадь.

4) Область ограничена кривыми: $y^2 = x$, $x^2 = y$. Найти ее площадь.

5) Найти площадь фигуры, если ее границей является кривая $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

6) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 3\cos t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

7) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 1 - \cos t \\ t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

8) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах как $\rho = \cos\varphi$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах как $\begin{cases} \rho = \varphi \\ \varphi \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

10) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$.

11) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$.

Раздел 11. Числовые ряды.

1) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+4}$?

2) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{n^2+n+7}$?

3) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{(n+1)!}$?

4) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\frac{n^2}{3^{n+1}}}$?

5) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+3)!}$?

6) Сходится ли ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$?

7) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+2}$?

8) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+5}$?

9) Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}$?

10) Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}\cdot 5^n}{(21)^n}$.

Раздел 12. Дифференциальные уравнения первого порядка.

1) Решить уравнение $y' = xy + x$.

2) Решить уравнение $(x+1)^2 y' = y$.

3) Решить задачу Коши: $y' = 1 + 2\frac{y}{x}$, $y(1) = 1$.

4) Найти общий интеграл уравнения $(x+y)y' = x - y + \frac{xy+y^2}{x}$.

5) Решить задачу Коши: $y' = 2y + 2$, $y(0) = 0$.

6) Решить задачу Коши: $2yy' = y^2 + 1$, $y(\ln 2) = 1$.

7) Найти общее решение уравнения $xy' + y = xy + 1$.

8) Решить задачу Коши: $y' = y - x + 1$, $y(0) = 1$.

9) Найти общее решение уравнения $y' \operatorname{tg} x = y$.

7) Найти общее решение уравнения $\frac{y'}{y} = \ln y - x + 1$.

Раздел 13. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

2) Найти общее решение уравнения $y''' + 2y'' + y = 0$.

3) Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' + 17y' = 0$.

4) Решить задачу Коши: $y'' - 5y' + 6y = 3e^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

5) Решить задачу Коши: $y'' - 4y = x$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

6) Найти общее решение уравнения $y''' - 9y' = x$.

7) Найти общее решение уравнения $y''' + y' = 1$.

8) Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

9) Найти общее решение уравнения $y'' - y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

10) Решить задачу Коши: $y''' = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

Раздел 14. Комплексные числа.

1) Записать в алгебраической форме число $I = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2$.

2) Записать в алгебраической форме число $I = (1-\sqrt{3}i)^{2018}$.

3) Для числа $z = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$ найти $|z|^{2018}$ и $\operatorname{Arg}(z^{2018})$.

4) Записать в алгебраической форме число $I = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}}{\cos\dfrac{5\pi}{18} + i\sin\dfrac{5\pi}{18}}$.

5) Нарисовать на комплексной плоскости область, заданную неравенствами:
$$\begin{cases} |z-1| \le 1, \\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

6) Нарисовать на комплексной плоскости область, заданную неравенством $|z| \ge |z+1|$.

7) Решить уравнение $\dfrac{2+3i}{\overline{(2-i)}} z - i = 0$. Ответ записать в алгебраической форме.

8) Решить уравнение $(2+i)z - (1+i)\overline{z} = i$. Ответ записать в алгебраической форме.

9) Найти все решения уравнения $z^3 - 2z^2 + 5z = 0$, лежащие в области $\begin{cases} |z| \le 2, \\ \operatorname{Re} z \ge 1. \end{cases}$

10) Найти все решения уравнения $z^2 + 2z + 10 = 0$, лежащие в области $\operatorname{Im}(\overline{z}) \ge \operatorname{Re} z$.

Раздел 15. Элементарные функции комплексного переменного, их свойства.

1) Решить уравнение $z^3 = -i$. Ответы записать в алгебраической форме.

2) Найти все значения $\sqrt[4]{i^4}$. Ответы записать а алгебраической форме.

3) Решить уравнение $\cos z = 2$. Ответы записать в алгебраической форме.

4) Записать в алгебраической форме i^i.

5) Найти $\mathrm{Re}(e^{iz^2})$.

6) Может ли функция $u = x^2 + y^2 - xy$ быть действительной частью некоторой аналитической в $\mathbb{C}$ функции?

7) Найти аналитическую в $\mathbb{C}$ функцию $f(z)$, такую, что $\mathrm{Im}\, f = x^2 - y^2 + y$, $f(0) = 0$.

8) Записать в алгебраической форме $\sin(1+i)$.

9) Решить уравнение $e^z = e^{2018\pi i}$.

Раздел 16. Изолированные особые точки и их классификация.

Определить особые точки и их типы для функции:

1) $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$;

2) $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$;

3) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{1 - \cos z}$;

4) $f(z) = \dfrac{e^{1/z} + 1}{e^{1/z} - 1}$;

5) $f(z) = z^3 \sin\dfrac{1}{z}$;

6) $f(z) = \dfrac{z(\mathrm{sh}\, z - z)}{(1-\cos z)^2}$;

7) $f(z) = e^z e^{\frac{1}{z-2}}$;

8) $f(z) = \dfrac{1}{\left(\sin z - \dfrac{1}{2}\right)^2}$;

9) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z-1)} e^{\frac{1}{z}}$;

10) $f(z) = \dfrac{\mathrm{tg}\, z}{z^3}$.

Раздел 17. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Вычислить:

1) $\displaystyle\int_{|z|=1} z^3 \sin\frac{1}{z}\, dz$;

2) $\displaystyle\int_{|z-1|=3} \frac{dz}{\sin z}$;

3) $\displaystyle\int_{|z-2|=5} \frac{\sin z - z}{z^4}\, dz$;

4) $\displaystyle\int_{|z|=1} z^3 e^{1/z}\, dz$;

5) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z\cos z}\,dz$;

6) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}\,dx$;

8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\cos x+2}$;

9) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$;

10) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}\,dx$.

Раздел 18. Функция-оригинал и ее изображение по Лапласу.

1) Найти изображение функции $f(t)=t^2e^{-3t}$.

2) Найти изображение функции $f(t)=te^{-3t}\sin 2t$.

3) Найти изображение функции $f(t)=t\,\mathrm{ch}\,2t-\mathrm{sh}\,t$.

4) Найти изображение функции $f(t)=\displaystyle\int\limits_0^t e^{-x}\cos(t-x)\,dx$.

5) Пусть $f(t)=e^{-2t}\sin 3t$. Найти изображение функции $f''(t)$.

6) Найти изображение функции $f(t)=\displaystyle\int\limits_0^t x^3e^{-3x}dx$.

7) Пусть $f(t)=\begin{cases}3, & t\in[0;1],\\ 0, & t\notin[0;1].\end{cases}$ Найти изображение $f(t)$.

8) Пусть $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t, & t\in[0;1],\\ 1, & t\in[1;2],\\ 0, & t>2.\end{cases}$. Найти изображение $f(t)$.

9) Пусть $\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geq 0.\end{cases}$ Найти изображение функции $f(t)=(t-1)e^{(t-1)}\eta(t-1)$.

10) Пусть $\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geq 0.\end{cases}$ Найти изображение $f(t)=\sin 2(t-2)e^{t-2}\eta(t-2)$.

11) Найти изображение функции $f(t)=t\sin^2 2t$.

Раздел 19. Восстановление оригинала по изображению.

Найти (непрерывную на $[0;+\infty)$) функцию-оригинал, если ее изображение $F(p)$ равно:

1) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)(p^2+2)}$;

2) $F(p)=\dfrac{p-3}{p^2-6p+10}$;

3) $F(p)=\left(\dfrac{p-2}{p^2-4p+5}\right)''$;

4) $F(p)=\left(\dfrac{p}{p^2+9}\right)''$;

5) $F(p)=\int\limits_p^{+\infty}\dfrac{dq}{q^2+4}$;

6) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p+1}$;

7) $F(p)=(e^{-2p}+3e^{-p})\dfrac{1}{p}$;

8) $F(p)=\int\limits_p^{+\infty}\dfrac{dq}{q(q^2+1)}$;

9) $F(p)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{p^{k+1}}$;

10) $F(p)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2p)^{k+1}}$;

Раздел 20. Операционные методы решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

1) Решить операционным методом задачу Коши:
$x''+x=2t+3,\ x(0)=1,\ x'(0)=1.$

2) Решить операционным методом задачу Коши:
$x''+x'=t,\ x(0)=1,\ x'(0)=0.$

3) Решить операционным методом задачу Коши:
$x''+x=2e^t,\ x(0)=0,\ x'(0)=1.$

4) Решить операционным методом задачу Коши:
$x''+x=2\cos t,\ x(0)=x'(0)=0.$

5) Операционным методом найти решение системы уравнений $\begin{cases}x'-y=0\\ y'-x=-1,\end{cases}$
удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=2,\ y(0)=1.$

6) Операционным методом найти решение системы уравнений $\begin{cases}x'-2y=2t\\ y'=\dfrac{1}{2}x-1,\end{cases}$
удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=2,\ y(0)=1.$

7) Операционным методом найти решение системы уравнений
$\begin{cases}x'-2y=0\\ y'+x=3e^{2t}+1,\end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=2,\ y(0)=1.$

Решения

§1.

3) $f'(x)=\frac{1}{3}(2-(\operatorname{tg}x)^5)^{-2/3}(-5(\operatorname{tg}x)^4)\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{-5(\operatorname{tg}x)^4}{3\sqrt[3]{(2-(\operatorname{tg}x)^5)^2}\cos^2 x}$.

§2.

1) $y=\frac{x^3-1}{x}$.

1. ОДЗ: $x\neq 0$.

2. $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=+\infty\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=0$ – вертикальная асимптота.

3. $f(-x)\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x)$, периода нет, т.е. функция общего вида.

4. $y=0\Rightarrow x^3-1=0\Rightarrow x=1;$ точка $(1;0)$ – точка пересечения с осью Ox.

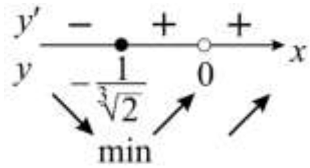
5. Найдем наклонные (горизонтальные) асимптоты:

$k=\lim\limits_{x=\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x=\pm\infty}\frac{x^3-1}{x^2}=+\infty$, т.е. наклонных и горизонтальных асимптот нет.

6. $y'=\left(\frac{x^3-1}{x}\right)'=\frac{3x^2x-(x^3-1)}{x^2}=\frac{2x^3+1}{x^2};$

$y'=0\Rightarrow 2x^3+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}};$

$y'\nexists\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0.$

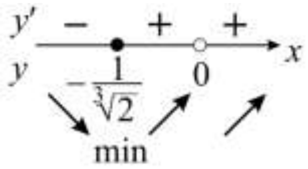


$y\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, т.е. $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$ – точка минимума.

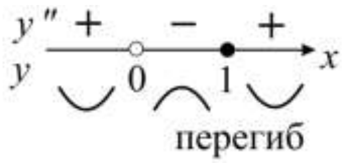
7. $y''=\left(\frac{2x^3+1}{x^2}\right)'=\frac{6x^2x^2-(2x^3+1)2x}{x^4}=\frac{2x^4-2x}{x^4}=\frac{2(x^3-1)}{x^3}.$

$y''=0\Rightarrow x^3-1=0\Rightarrow x=1.$

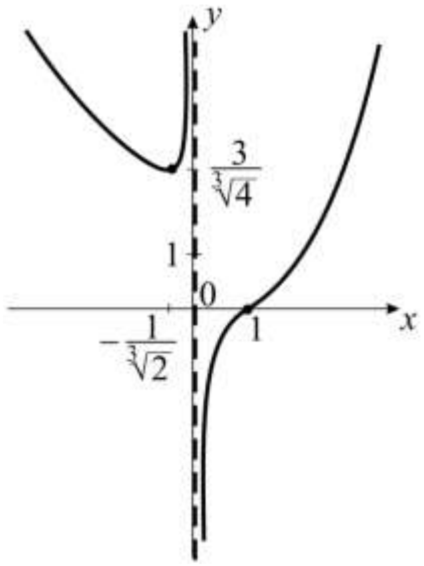
$y''\nexists\Rightarrow x^3=0\Rightarrow x=0.$



$$y\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}},$$ т.е. $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$ – точка минимума.



$y(1)=0$, т.е. точка $(1;0)$ – точка перегиба.



§3.

2) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$

1. $|A|=1\neq 0\Rightarrow \exists! A^{-1}.$

2. $\begin{matrix}A_{11}=1 & A_{21}=0 & A_{31}=-1\\ A_{12}=0 & A_{22}=1 & A_{32}=-1\\ A_{13}=0 & A_{23}=0 & A_{33}=1\end{matrix}$

3. $\tilde{A}^T=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$

4. $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}^T=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$

5. Проверка: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ (?)

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$A^{-1}A=E.$

§4.

1) $\begin{cases}-2x_1+4x_2+2x_4=16,\\ x_1+2x_3+3x_4=-2.\end{cases}$

$$A\,|\,B=\left(\begin{array}{cccc|c}-2&4&0&2&16\\1&0&2&3&-2\end{array}\right)\langle\cdot 1/2\rangle\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1&2&0&1&8\\1&0&2&3&-2\end{array}\right)\langle\downarrow+\rangle\sim$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c}-1&2&0&1&8\\0&2&2&4&6\end{array}\right)\begin{matrix}\langle\cdot-1\rangle\\ \langle\cdot 1/2\rangle\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&0&-1&-8\\0&0&1&2&3\end{array}\right)\langle\cdot 2\uparrow\rangle\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&3&-2\\0&1&1&2&3\end{array}\right).$$

$\operatorname{Rg}A=\operatorname{Rg}A\,|\,B=2;\ \dim L=2\Rightarrow$ФСР: $\vec{e}_1,\vec{e}_2.$

2 баз. переменные: x_1, x_2, 2 своб. переменные: x_3, x_4.

$\begin{cases}x_1=-2-2x_3-3x_4,\\ x_2=3-x_3-2x_4.\end{cases}$

$$\vec{x}_{\text{î.í.}}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2-2x_3-3x_4\\3-x_3-2x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\end{pmatrix}}_{x_{\text{÷.í.}}}+C_1\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{e}_1}+C_2\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{e}_2}.$$

Проверки: $\vec{x}_{\text{÷.í.}}:-2\cdot(-2)+4\cdot 3+2\cdot 0=16;$

$\vec{e}_1:-2\cdot(-2)+4\cdot(-1)+2\cdot 0=0;$

$\vec{e}_2:-2\cdot(-3)+4\cdot(-2)+2\cdot 1=0.$

§5.

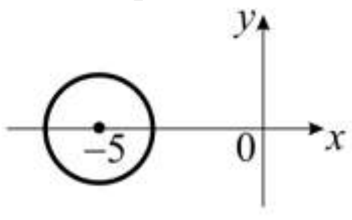
1) $A(1;1;0)$, $\alpha: 3x-4y+z=1$, $A\in\beta$ и $\alpha\,||\,\beta$. Так как $\alpha\,||\,\beta$, то $\vec{n}_1\,||\,\vec{n}_2$, $\vec{n}_1=\{3;-4;1\}$ – нормальный вектор плоскости α, который можно взять за нормальный вектор к плоскости β, точка $A\in\beta$, тогда уравнение плоскости β:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

т.е. $3(x-1)-4(y-1)+1(z-0)=0$, $\beta: 3x-4y+z+1=0.$

§6.

1) $(x+5)^2+y^2=3$– окружность с центром в точке $(-5;0)$ и радиусом $\sqrt{3}$.



§7.

7) $\int \ln x dx = ?$

Интегрирование по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du = \left\langle \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right\rangle = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C.$$

§8.

6) $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x \, d(\sin x) = \dfrac{\sin^3 x}{3} + C$ (метод подведения под знак диффе-
ренциала).

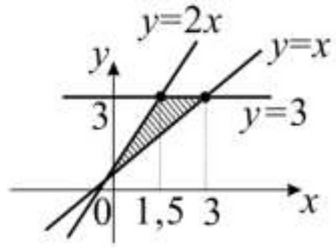
§9.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

4) $\displaystyle\int_2^e \frac{dx}{x \ln^3 x} = \int_2^e \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = -\frac{1}{2\ln^2 x}\bigg|_2^e = -\frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{2\ln^2 e} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\ln^2 2}\right).$

§10.

1) $y = x;\ \ y = 2x;\ \ y = 3.$



$$S_{\text{ôèãóðû}} = \int_0^{3/2} (2x - x) dx + \int_{3/2}^{3} (3 - x) dx \Rightarrow \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{3/2} + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{3/2}^{3} =$$

$$= \frac{9}{8} + 9 - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

§11.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4}.$

1. Проверить необходимое условие сходимости: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+4} = 0.$

2. По второй теореме сравнения $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится; так как $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+4} \cdot \frac{n}{1} = \frac{1}{3},$ то оба ряда ведут себя одинаково, т.е. исходный ряд расходится.

§12.

1) $y' = xy + x,$

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1) \quad |: \; y+1 \neq 0,$$

$$\frac{dy}{y+1} = xdx,$$

$\int \frac{dy}{y+1} = xdx;\; \ln|y+1| = \frac{x^2}{2} + C;\; y+1 = e^{x^2/2}C;\; y = e^{x^2/2}C - 1;$ так как при $C = 0$

$y = -1,$ то ответ: $y = e^{x^2/2}C - 1.$

§13.

1) $y''' - 3y'' + 2y' = 0.$

Составим характеристическое уравнение:

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0,\; \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0,\; \lambda_1 = 0,\; \lambda_2 = 1,\; \lambda_3 = 2$ – все корни кратности 1.

$y_{\text{о.о.}} = C_1 + C_2 e^x + C_3^{2x}.$

§14.

4) 5б: $\dfrac{\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{5\pi}{18} + i\sin\frac{5\pi}{18}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{9}}}{e^{i\frac{5\pi}{18}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{9} - \frac{5\pi}{18}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$

§15.

$z^3 = -i \Rightarrow z = |z|e^{i\varphi};\; -i = e^{i\frac{3\pi}{2}};$

$$|z|^3 e^{i3\varphi} = 1 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1, \\ 3\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$k = 0 \quad z = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$

$k = 1 \quad z = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2};$

$k = 2 \quad z = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$

§16.

$$\frac{z}{\sin z}.$$

$z=0$ – устранимая точка, $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\sin z}=0$; $z=k\pi$ при $k=\pm\pi,\pm 2\pi,\dots$ – полюса 1-го порядка, так как $\dfrac{1}{f}=\dfrac{\sin z}{z}$ имеет в этих точках нуль первого порядка ($\sin k\pi=0, \cos k\pi\neq 0$).

§17.

$\int\limits_{|z|=1} z^3\sin\dfrac{1}{z}dz=0,$ так как разложение в ряд Лорана этой функции имеет вид:

$z^3\sin\dfrac{1}{z}=z^3\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{5!}\cdot\dfrac{1}{z^5}+\dots\right)=z^2-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5!}z^2+\dots,$ т.е. коэффициент при степени $\dfrac{1}{z}$ равен 0.

§18.

1) 5б: так как $e^{-3t}\doteq\dfrac{1}{p+3}$, а домножение оригинала на $(-t)$ соответствует дифференцированию изображения, то $t^2e^{-3t}\doteq\left(\dfrac{1}{p+3}\right)''=((p+3)^{-1})''=\dfrac{2}{(p+3)^3}.$

§19.

$F(p)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{p^{k+1}}$. Так как $\dfrac{1}{p^{k+1}}\doteq\dfrac{t^k}{k!}$, то $F(p)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^k}{k!}=e^t.$

§20.

$x''+x=2e^t$, $x(0)=0$; $x'(0)=1.$

Пусть $x(t)\doteq F(p)$. Тогда $x''(t)\doteq p(pF(p)-x(0))-x'(0)=p^2F(p)-1;$

$e^t\doteq\dfrac{1}{p-1}\Rightarrow p^2F(p)-1+F(p)=2\dfrac{1}{p-1}\Rightarrow(p^2+1)F(p)=\dfrac{2}{p-1}+1\Rightarrow$

$F(p)=\dfrac{p+1}{(p-1)(p^2+1)}=\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{p}{p^2+1}.$

Так как $F(p)\doteq e^t-\cos t$, то ответ $x(t)=e^t-\cos t.$

Справочные материалы

А. Таблица производных

1. $c' = 0,\ c = \mathrm{const}$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$
17. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$
18. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Б. Таблица интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
   $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:
    $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$$
14. «Длинный» логарифм:
    $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

В. Таблица изображений и оригиналов

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$t^n,\ n\in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$t^\alpha(\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$te^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p-\lambda)^2}$	$\frac{\sin t}{t}$	$\operatorname{arcctg} p$
$t^n e^{\lambda t},\ n\in N$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$\frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right)$	$\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$
$t^\alpha e^{\lambda t}, \alpha>-1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$	$\delta(t)$	1
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a>0$	e^{-ap}
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$		